$4y) = 2y$; el área coincide por casualidad, $9\,[u^2]$, pero el integrando verificado es $6y - 2y^2$. La ecuación de los cortes aparece como $2y^2 - 6 = 0$; la verificada es $2y^2 - 6y = 0$.

C.4 · Unidad 4 · Funciones de varias variables: derivadas parciales, plano tangente y derivada direccional

1er extraordinario 2010-2, tipo A, problema 7: La resolución publicada del problema 7 corresponde a otro enunciado (el plano tangente a la superficie $z - x\,\mathrm{sen}\,y + y\,\mathrm{sen}\,x = 0$) y no da la razón de cambio ni la dirección pedidas. Los valores verificados son $D_{\mathbf{u}}T = \frac{208}{3}e^3$ °C/m y la dirección de $\nabla T(-1,2,2) = e^3(4,-64,72)$.

1er final 2018-1, tipo A, problema 5: El enunciado pide las curvas de nivel $z = 1$ y $z = 2$, pero la función solo toma valores negativos y esos niveles no tienen ningún punto. En la resolución publicada aparecen las elipses $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ y $x^2 + \frac{y^2}{1/4} = 1$ para $z = 1$ y $z = 2$; son las curvas de nivel $z = -1$ y $z = -2$.

C.5 · Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

2º final 2018-1, problema 1: En la resolución publicada la derivada de orden n aparece como $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{3}\frac{(-1)^n}{(1+x)^n}$; el signo verificado es $(-1)^{n+1}$ (por ejemplo, $f'(0) = \frac{1}{3} > 0$). La serie final publicada sí es la correcta.

1er final 2017-2, tipo A, problema 1: En la resolución publicada el resultado enmarcado es $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$, que omite el término constante $\frac{1}{2}$; el resultado verificado empieza en $n = 0$: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$, como en el renglón anterior de la misma resolución.

para $z = \mathrm{senh}(3x + y) - \cosh(x - 2y)$.

Resolución.

1. Primeras parciales ($(\mathrm{senh})' = \cosh$, $(\cosh)' = \mathrm{senh}$):

$$z_x = 3\cosh(3x + y) - \mathrm{senh}(x - 2y),$$
$$z_y = \cosh(3x + y) + 2\,\mathrm{senh}(x - 2y).$$

2. Segundas parciales:

$$z_{xx} = 9\,\mathrm{senh}(3x + y) - \cosh(x - 2y),$$
$$z_{xy} = 3\,\mathrm{senh}(3x + y) + 2\cosh(x - 2y),$$
$$z_{yy} = \mathrm{senh}(3x + y) - 4\cosh(x - 2y).$$

3. Sustitución, agrupando por función:

$$(18 - 15 - 3)\,\mathrm{senh}(3x + y)$$
$$+ (-2 - 10 + 12)\cosh(x - 2y) = 0.$$

4. **Ambos coeficientes valen cero: la igualdad se cumple para todo** (x, y)**.**

Ejercicio 4.5.5 · Plano tangente a un elipsoide

Adaptado de: 2º extraordinario 2016-2, problema 6.

Obtenga la ecuación del plano tangente al elipsoide

$$x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 = 1$$

en el punto $A(0,1,1)$.

Resolución.

1. El punto está en la superficie: $0 + 0 + 1 = 1$.
2. $F(x,y,z) = x^2 + \frac{(y-1)^2}{4} + z^2 - 1$; $\nabla F = \left(2x,\ \frac{y-1}{2},\ 2z\right)$.
3. En A: $\nabla F(0,1,1) = (0,0,2)$.
4. Plano: $0(x-0) + 0(y-1) + 2(z-1) = 0$.
5. $z = 1$**.** Es un plano horizontal: A es el punto más alto del elipsoide. La recta normal es la vertical $x = 0$, $y = 1$, $z = 1 + 2t$.

Ejercicio 4.5.6 · Diferencial total: contracción de un cilindro

Adaptado de: 1er extraordinario 2011-1, tipo A, problema 6.

Por efecto de la temperatura, un cilindro metálico se contrae: su radio pasa de 10 a 9.8 cm y su altura de 15 a 14.5 cm. Calcule, por medio de diferenciales, el cambio en el volumen del cilindro.

Resolución.

1. $V = \pi r^2 h$, así que

$$\mathrm{d}V = 2\pi r h\,\mathrm{d}r + \pi r^2\,\mathrm{d}h.$$

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1E 2019-1	Ser	VM	Int	Área	Dom	Dir		
2E 2019-1	Ser	VM	Int	Vol	Dom	PS		3: 3A.5.2; 3: 3A.6.6
3E 2019-1	Mac	VM	Int	Vol	Dom	PT		
1F 2019-2 A	Ser	VM	Int	Área	Dom	RC		
1F 2019-2 C	Ser	TFC	Int	Área	CN	Dir		
2F 2019-2	Mac	Imp	Int	Arc	RC	PT		1: 5.5.7; 3: 3A.5.10; 4: 3B.5.6; 5: 4.6.5
1E 2019-2	Mac	VM	Int	Área	Dom	Dir		3: 3A.5.7; 6: 4.5.9
2E 2019-2	Mac	VM	Int	Área	PS	Dir		
3E 2019-2	Mac	Imp	Int	Arc	RC	PT		
1F 2020-1 A	Ser	Imp	Int	Área	Dom	Dir		1: 5.5.1; 2: 2.5.7
1F 2020-1 C	Ser	Par	Int	Área	Dir	RC		2: 1.6.3
2F 2020-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	PT		2: 2.6.1; 3: 3A.6.4
1E 2020-1	Mac	LH	Int	Vol	Dom	PS		4: 3B.6.3
2E 2020-1	Ser	Ri	Int	Área	RC			2: 1.6.1
3E 2020-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	PT		6: 4.6.3
1F 2024-1 A	Ser	Mac	LH	Int	Vol	Dir	PS	1: 5.5.2
2F 2024-1	Ser	VM	Int	Arc	PS	Dir		
1E 2024-1	Mac	LH	Int	Área	PT	Dif		
1F 2024-2	Mac	Imp	Int	Área	Dom	Dir		1: 5.5.6
2F 2024-2	Mac	Par	Int	Área	RC	Dir		2: 1.5.5
1E 2024-2	Ser	LH	Int	Área	PT	Dir		1: 5.5.5
2E 2024-2	VM	LH	Int	Área	Dom	RC		
3E 2024-2	Mac	Par	Int	Área	RC	Dir		
1F 2025-1 A	Ser	Mac	TFC	Int	Área	PT		1: 5.5.3; 3: 1.6.2
3E 2025-1	Ser	VM						
1F 2025-2 A	Mac	Int	Imp	Int	PT	Dir		
2F 2025-2 A	Mac	VM	Imp	Int	PS	Dir		
1F 2026-1 A	Mac	Imp	Int	Área	PT	Dir		
2F 2026-1 A	Mac	VM	Imp	Int	PS	Dir		
2E 2026-1 A	Mac	Imp	Int	Área	Dir			
3E 2026-1	Mac	VM	Imp	Int	PS	Dir		

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne ejercicios propuestos en el orden del examen de tu plan: seis problemas, el tercero con tres integrales. Resuélvelo en **2 horas**, sin calculadora, sin formulario y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

Problema	Plan 2010, I	Plan 2010, II	Plan 2016, I	Plan 2016, II
1	1.6.4	1.6.5	5.6.1	5.6.4
2	2.6.3	2.6.5	1.6.3	2.6.1
3	3A.6.1, 3A.6.3, 3A.6.5	3A.6.2, 3A.6.6, 3A.6.8	3A.6.4, 3A.6.6, 3A.6.7	3A.6.2, 3A.6.4, 3A.6.8
4	3B.6.2	3B.6.5	3B.6.1	3B.6.3
5	4.6.4	4.6.2	4.6.1	4.6.5
6	4.6.6	4.6.5	4.6.3	4.6.6

Los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). Con calificación de 60 o más en dos simulacros seguidos, estás listo para el examen; si un problema falla, vuelve a la unidad y resuelve otra vez sus ejercicios de la sección 5.

Resolución.

1. $\nabla f = \big(2e^{2x}\operatorname{sen} y,\ e^{2x}\cos y\big)$.
2. En P: $e^0 = 1$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, así que $\nabla f(P) = \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. **a) La dirección de** $\nabla f(P) = \sqrt{2}\,\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{j}$, que es la del vector $(2,1)$; como unitario, $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
4. **b)** $\|\nabla f(P)\| = \sqrt{2 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.4**.

Ejercicio propuesto 4.6.1

Adaptado de: 2º extraordinario 2018-1, problema 5.

Sea $f(x,y) = xy\ln(xy)$. Calcule $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\right|_{(e,e)}$.

Resultado: $f_{xy} = 2 + \ln(xy)$; en (e,e) vale 4.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 104.

Ejercicio propuesto 4.6.2

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 5.

Verifique que la función $u(x,y) = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$ satisface la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Resultado: $u_{xx} = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x = -u_{yy}$; la suma es cero.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.3

Adaptado de: 3er extraordinario 2020-1, problema 6.

Obtenga la ecuación cartesiana del plano tangente a la gráfica de $g(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ en el punto $P(2,2)$.

Resultado: $2x + 2y + z = 9$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.4

Adaptado de: 1er final 2016-1, tipo A, problema 6.

Obtenga la ecuación de la recta normal a la superficie $2xy - z + z^4 = -4$ en el punto $A(1,-2,1)$.

Resultado: $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 112 finales y extraordinarios publicados, en orden cronológico. Cada columna numerada es un problema del examen, con el tema en clave; la última columna dice en qué ejercicio del cuaderno se trabaja (problema: número del ejercicio). Las versiones del mismo examen suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta, la otra se practica con el mismo procedimiento.

Exámenes: 1F y 2F, primer y segundo final; 1E, 2E y 3E, primer, segundo y tercer extraordinario; la letra es el tipo.

Temas:

- Unidad 1: VM, valor medio y teorema del valor medio; Ri, sumas de Riemann; TFC, teorema fundamental; Par, integral con parámetro.
- Unidad 2: LH, regla de L'Hôpital; Imp, integral impropia; Der, derivada de logaritmos y exponenciales.
- Unidad 3: Int, integrales por método (Parte A); Área, Vol, Arc y ÁP, área, volumen, longitud de arco y área en polares (Parte B).
- Unidad 4: Dom, dominio y región; CN, curvas de nivel; Lím, límite doble; PS, derivadas parciales sucesivas; PT, plano tangente y recta normal; Dif, diferencial total; RC, regla de la cadena y razón de cambio; Impl, derivación implícita; Dir, gradiente y derivada direccional.
- Unidad 5: Ser, sucesiones y series; Mac, serie de Maclaurin o Taylor.

En la última columna, «ej. 1.4» es un ejemplo de la sección 1.4; los demás números son ejercicios resueltos (sección 5 de cada unidad) o propuestos (sección 6).

Plan 2010

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1F 2010-1 A	VM	Imp	Int	Dom	PS	Vol	Dir	
1F 2010-1 C	VM	Der	Int	Arc	Lím	PT		2: 2.5.1; 3: 3A.5.4
2F 2010-1 A	VM	LH	Int	Área	PS	Dir		
2E 2010-1 A	VM	Imp	Int	Arc	Dom	PT		2: 2.6.4; 3: 3A.6.1
1F 2010-2 A	Ri	Der	LH	Int	Arc	Dom	Dir	4: 3A.5.1
1F 2010-2 C	VM	Der	Imp	Int	Vol	PT	Dom	1: ej. 1.4; 2: 2.5.2
2F 2010-2 A	VM	LH	Int	Vol	Dom	Dir	RC	2: ej. 2.4
1E 2010-2 A	Ri	VM	LH	Int	Área	Dom	Dir	7: ej. 4.4
2E 2010-2 A	VM	LH	Int	Arc	Dif	PS	Dir	
1F 2011-1 A	VM	LH	Int	Vol	RC	PS		1: 1.5.1
1F 2011-1 C	Ri	LH	Int	Área	Dir	RC		1: ej. 1.4
2F 2011-1 A	VM	Imp	Int	Área	Dom	CN	Dir	3: 3A.5.5; 3: 3A.6.8
1E 2011-1 A	VM	Imp	Int	Arc	CN	Dif	Dir	6: 4.5.6
2E 2011-1	VM	Imp	LH	Int	Arc	Dir		3: 2.5.3; 4: 3A.5.8; 5: 3B.5.7
1F 2011-2 A	Ri	LH	Int	Área	PT	PS	Dom	
1F 2011-2 C	VM	LH	Int	Vol	Dom	PT	PS	2: ej. 2.4
1F 2011-2 D	VM	LH	Int	Vol	Dom	PT	PS	
2F 2011-2 A	Par	Imp	Int	Vol	Arc	RC	Dir	3: ej. 3A.4
1E 2011-2	Ri	Imp	Int	Área	Impl	Dir		1: 1.5.2
2E 2011-2	VM	LH	Int	Área	PT	PS		2: 2.6.3
3E 2011-2	VM	LH	Int	Vol	Arc	RC	Dir	4: ej. 3B.4; 5: 3B.6.4

- Plano tangente a $z = f(x, y)$:

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0).$$

- Mixtas continuas: $f_{xy} = f_{yx}$. Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- Diferencial total: $\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y \approx \Delta z$.
- Cadena: $z_x = z_u\,u_x + z_v\,v_x$; $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z_x\,x'(t) + z_y\,y'(t)$.
- Implícita: $z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$.
- $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$; $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- Máximo aumento: dirección ∇f, razón $\|\nabla f\|$. Máximo descenso: $-\nabla f$. Sin cambio: $\mathbf{u} \perp \nabla f$.
- Volúmenes que salen: cilindro $V = \pi r^2 h$; cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

4.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Identifica el tipo con la tabla 4.2; los dos problemas de la unidad suelen ser de tipos distintos.
2. Dominio: escribe cada condición, resuélvela, dibuja con borde continuo o punteado y prueba un punto.
3. Curvas de nivel: primero el recorrido; después iguala a k y nombra la cónica.
4. Derivadas: simplifica cada parcial antes de volver a derivar y evalúa al final.
5. Plano tangente y direccional: evalúa ∇F o ∇f en el punto, normaliza el vector de dirección y escribe unidades si las hay.
6. Revisa que el punto esté en la superficie o en el dominio y que el resultado responda exactamente lo que se pregunta (dirección, razón, ecuación).

4.10 Puente a Cálculo Vectorial

Cálculo Vectorial, la materia siguiente, da por sabido lo que se practica en este libro. Antes de empezarla, conviene repasar:

- **Extremos de funciones de varias variables** (matriz hessiana, multiplicadores de Lagrange): derivadas parciales de primero y segundo orden, mixtas y gradiente (Unidad 4, secciones 4.3.4, 4.3.5 y 4.3.10).
- **Curvas y superficies** (vector normal, plano tangente, operadores diferenciales): plano tangente y recta normal, gradiente y regla de la cadena (Unidad 4, secciones 4.3.6, 4.3.8 y 4.3.10).
- **Integrales de línea:** sustitución, integración por partes y potencias trigonométricas como $\int \operatorname{sen}^2 t\,\mathrm{d}t$ o $\int \cos^3 t\,\mathrm{d}t$ (Unidad 3, Parte A); parametrización de curvas y longitud de arco (Unidad 3, Parte B).
- **Integrales dobles** (y el teorema de Green): antiderivadas rápidas para las integrales iteradas, sustitución trigonométrica (Unidad 3, Parte A) y área en coordenadas polares (Unidad 3, Parte B), que anticipa el cambio a polares.
- **Integrales triples y de superficie:** integrales trigonométricas y de potencias (Unidad 3, Parte A); los volúmenes de revolución (Unidad 3, Parte B) sirven para comprobar resultados.

A.3 Unidad 3A · Métodos de integración

- Partes: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$; elección de u con LIATE (logaritmo, inversa, algebraica, trigonométrica, exponencial).
- $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x$; $\int \operatorname{ang\,tan} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{ang\,tan} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.
- $\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$; $\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x|$; $\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x|$.
- $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$; $1+\tan^2 x = \sec^2 x$; $1+\cot^2 x = \csc^2 x$.
- $\int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$; $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x$.
- $\int \sec^3 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\sec x\tan x + \ln|\sec x + \tan x|\big)$.
- Sustitución trigonométrica: $\sqrt{a^2-x^2} \to x = a\operatorname{sen}\theta$; $\sqrt{a^2+x^2} \to x = a\tan\theta$; $\sqrt{x^2-a^2} \to x = a\sec\theta$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a}$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,sec}\frac{u}{a}$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2\pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2\pm a^2}\right|$.
- Fracciones parciales: $\frac{A}{x-r}$ por factor lineal; $\frac{A_1}{x-r} + \cdots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$ por factor repetido; $\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ por cuadrático irreducible.
- $\int \frac{A\,\mathrm{d}x}{(x-r)^2} = -\frac{A}{x-r}$; $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+q} = \frac{1}{2}\ln(x^2+q)$.

A.4 Unidad 3B · Aplicaciones

- Área en x: $A = \int_a^b \big[f(x) - g(x)\big]\mathrm{d}x$, con f arriba.
- Área en y: $A = \int_c^d \big[x_{\text{der}} - x_{\text{izq}}\big]\mathrm{d}y$.
- Área en polares SOLO PLAN 2010 : $A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2\mathrm{d}\theta$.
- Arco, cartesianas: $L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$.
- Arco, paramétricas: $L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,\mathrm{d}t$.
- Arco, polares: $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta$.
- Discos y arandelas: $V = \pi\int_a^b \big(R^2 - r^2\big)\mathrm{d}x$ (o $\mathrm{d}y$).
- Capas: $V = 2\pi\int_a^b \rho\,h\mathrm{d}x$, con ρ la distancia al eje.
- Identidades útiles: $\cos^2 u = \frac{1+\cos 2u}{2}$, $\operatorname{sen}^2 u = \frac{1-\cos 2u}{2}$, $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

A.5 Unidad 4 · Varias variables

- Dominio: raíz par ≥ 0; logaritmo > 0; denominador $\neq 0$.
- Curva de nivel k: $f(x,y) = k$, con k en el recorrido.
- Límite doble: si por $y = mx$ depende de m, no existe.
- Plano tangente a $F(x,y,z) = 0$ en P_0, con $\nabla F(P_0) = (a,b,c)$:

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0.$$

- Recta normal: $\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$.
- Plano tangente a $z = f(x,y)$:

$$z - z_0 = f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0).$$

Serie	Carácter
Geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots$	converge si $\lvert r\rvert < 1$, con suma $\frac{a}{1-r}$ (a es el primer término); diverge si $\lvert r\rvert \geq 1$
Serie p: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$	converge si $p > 1$; diverge si $p \leq 1$
Armónica $\sum \frac{1}{n}$ ($p = 1$)	diverge
Armónica alternada $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	converge (condicionalmente), con suma $\ln 2$
Telescópica $\sum(b_n - b_{n+1})$	$S_n = b_1 - b_{n+1}$; converge a $b_1 - \lim b_n$ si ese límite existe

Criterios para series de términos positivos.

- *Comparación directa:* si $0 \leq a_n \leq b_n$ y $\sum b_n$ converge, $\sum a_n$ converge; si $a_n \geq b_n \geq 0$ y $\sum b_n$ diverge, $\sum a_n$ diverge.
- *Comparación en el límite:* si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $0 < c < \infty$, las dos series tienen el mismo carácter. Se compara con una geométrica o una serie p que tenga las potencias dominantes: $\frac{n+1}{n^3+2}$ con $\frac{1}{n^2}$.
- *Cociente (D'Alembert):* con $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, la serie converge si $L < 1$, diverge si $L > 1$ y el criterio no decide si $L = 1$. Es el criterio de las series con factoriales y potencias c^n.

Series alternadas (Leibniz). Una serie $\sum(-1)^{n+1}b_n$ con $b_n > 0$ converge si b_n es decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Si además $\sum|a_n|$ converge, la convergencia es *absoluta*; si $\sum a_n$ converge pero $\sum|a_n|$ diverge, es *condicional*. Toda serie absolutamente convergente converge.

Serie de potencias. Es una serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, con centro a. Converge en un intervalo centrado en a: solo en $x = a$, para todo x (radio $R = \infty$) o para $|x-a| < R$, y en los extremos $x = a \pm R$ puede converger o no; cada extremo se estudia aparte. Ese conjunto es el *intervalo de convergencia*.

Series de Taylor y de Maclaurin. Si f tiene derivadas de todos los órdenes en a, su serie de Taylor alrededor de a es

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

es decir, $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$ La serie de Maclaurin es el caso $a = 0$. Dentro de su intervalo de convergencia, una serie de potencias se puede derivar e integrar término a término (el radio no cambia), y en ella se puede sustituir x por $2x$, $-x$, x^2, etcétera.

5.2 Cómo reconocer el problema

- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

5.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Si la serie no tiene x: término n-ésimo primero; después geométrica, serie p, cociente o Leibniz, según su forma.
2. Si tiene x: cociente con valor absoluto, despeja $|x-a| < R$ y sustituye cada extremo en la serie original.
3. Si piden Maclaurin o Taylor: busca primero una serie conocida con sustitución; si no la hay, haz la tabla de cuatro o cinco derivadas y busca el patrón.
4. Escribe el resultado completo: carácter con el criterio usado, suma exacta, intervalo con corchetes o paréntesis, término general con su índice.

4. Con las dos condiciones, converge. Si piden el tipo, estudia $\sum b_n$: si converge, es absoluta; si no, condicional.

5.3.4 Intervalo de convergencia

1. Aplica el cociente con valor absoluto a toda la expresión, incluida la x:
$$L(x) = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$
2. Resuelve $L(x) < 1$. Queda $|x-a| < R$, es decir, $a - R < x < a + R$. Si $L(x) = 0$ para todo x, el intervalo es $(-\infty, \infty)$ y no hay extremos.
3. Sustituye cada extremo en la serie **original**: obtienes dos series numéricas. Decide cada una con 5.3.1 (casi siempre serie p o Leibniz).
4. Escribe el intervalo con corchete en los extremos que convergen y paréntesis en los que divergen.

5.3.5 Serie de Maclaurin o Taylor por derivadas

1. Haz la tabla: f, f', f'', f''', $f^{(4)}$ y cada una evaluada en a (en Maclaurin, $a = 0$). Simplifica antes de derivar: $\ln \sqrt[3]{1+x} = \frac{1}{3}\ln(1+x)$.
2. Busca el patrón de $f^{(n)}(a)$: signo alternado $(-1)^{n+1}$, factorial $(n-1)!$, potencias 2^n, ceros en los pares o impares.
3. Escribe los términos $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ y el término general con su índice inicial.
4. Si piden el intervalo, aplica 5.3.4 al término general.

5.3.6 Serie a partir de una conocida

1. Reconoce la conocida: e^u, $\operatorname{sen} u$, $\cos u$, $\operatorname{senh} u$, $\cosh u$, $\ln(1+u)$, $\frac{1}{1-u}$.
2. Sustituye u ($u = 2x$, $u = -x$, $u = x^2$, $u = 2(x-1)$) y simplifica cada término.
3. Si la función es una derivada o integral de una conocida, deriva o integra término a término: $\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x}$.
4. El intervalo es el de la conocida con u en lugar de x: $\frac{2}{1+x}$ converge si $|-x| < 1$. En los extremos revisa de nuevo, porque integrar puede ganar un extremo y derivar perderlo.

5.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · Intervalo de convergencia con los dos extremos

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie de potencias
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n}.$$

Resolución.

1. Cociente con valor absoluto:
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(2x-1)^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{(2x-1)^n} \right| = |2x-1| \, \frac{n}{n+1}.$$

5.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 5.5.1 · Intervalo con los dos extremos convergentes

Adaptado de: 1er final 2020-1, tipo A, problema 1.

Obtenga el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-4)^n}{4^n\, n^2}$$

e incluya el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Cociente:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x-4|}{4}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to \frac{|x-4|}{4}.$$
2. $\frac{|x-4|}{4} < 1 \Rightarrow |x-4| < 4 \Rightarrow 0 < x < 8$. Centro 4, radio 4.
3. $x = 0$: $\frac{(-1)^n(-4)^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^{2n}4^n}{4^n n^2} = \frac{1}{n^2}$. Serie p con $p = 2 > 1$: converge.
4. $x = 8$: $\frac{(-1)^n 4^n}{4^n n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$. La serie de sus valores absolutos es $\sum \frac{1}{n^2}$, que converge: converge absolutamente.
5. **Intervalo de convergencia:** $0 \le x \le 8$**, es decir,** $[0, 8]$**.**

Ejercicio 5.5.2 · Intervalo con exponente $n-1$

Adaptado de: 1er final 2024-1, tipo A, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\, x^{n-1}}{n}.$$

Resolución.

1. Cociente (las potencias de x bajan un grado: $\frac{x^n}{x^{n-1}} = x$):
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{4^{n+1}|x|^n}{n+1} \cdot \frac{n}{4^n|x|^{n-1}} = 4|x|\,\frac{n}{n+1} \to 4|x|.$$
2. $4|x| < 1 \Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$. Centro 0, radio $\frac{1}{4}$.
3. $x = \frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4}{n}$. La serie $4\sum \frac{1}{n}$ diverge (armónica).
4. $x = -\frac{1}{4}$: $\frac{4^n}{n}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{4(-1)^{n-1}}{n}$. Es 4 por la armónica alternada: converge (condicionalmente) por Leibniz.
5. **Intervalo de convergencia:** $-\frac{1}{4} \le x < \frac{1}{4}$**, es decir,** $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$**.**

Ejercicio 5.5.3 · Intervalo con factorial: radio infinito

Adaptado de: 1er final 2025-1, tipo A, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x+1)^n}{n!}.$$

5.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.5**.

Ejercicio propuesto 5.6.1

Adaptado de: 2º final 2017-2, problema 1.

Determine el intervalo de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{3^n (n+1)^2}.$$

Resultado: $[1, 7]$: converge en los dos extremos.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 5.6.2

Adaptado de: 1er final 2019-1, tipo C, problema 1.

Determine el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{7}}$$

empleando el criterio de Leibniz.

Resultado: Diverge: $b_n = 7^{-1/(n+1)} \to 1 \neq 0$, así que no se cumple Leibniz y falla el criterio del término n-ésimo.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.3

Adaptado de: 1er extraordinario 2017-2, problema 1.

Escriba el número decimal periódico infinito $0.7777\ldots$ como una serie y determine su carácter. Si es convergente, calcule su suma.

Resultado: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$, geométrica convergente con suma $\frac{7}{9}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 5.6.4

Adaptado de: 2º final 2018-1, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de $f(x) = \ln\sqrt[3]{1+x}$.

Resultado: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{3n} = \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{9} - \ldots$, en $(-1, 1]$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

2. Valores iniciales $r = 10$, $h = 15$; cambios $\mathrm{d}r = -0.2 = -\frac{1}{5}$, $\mathrm{d}h = -0.5 = -\frac{1}{2}$.
3. Sustitución:
$$\begin{aligned}\mathrm{d}V &= 2\pi(10)(15)\left(-\tfrac{1}{5}\right) + \pi(100)\left(-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= -60\pi - 50\pi.\end{aligned}$$
4. $\mathrm{d}V = -110\pi$ **cm**^{3} (unos 346 cm^3): el volumen disminuye.
5. Comparación con el incremento exacto: $\Delta V = \pi(9.8)^2(14.5) - \pi(100)(15) = -\frac{5371}{50}\pi \approx -107.4\pi$. La diferencial se aleja menos del 3 %.

Ejercicio 4.5.7 · Regla de la cadena con dos variables intermedias

Adaptado de: 2º final 2016-1, tipo A, problema 5.

Sean $z = u^2 - v$, $u = e^{2x+y}$ y $v = \operatorname{sen}(x+y)$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en $(1,-1)$.

Resolución.

1. Árbol: z depende de u y v; cada una depende de x y y. $z_u = 2u$, $z_v = -1$.
2. Derivadas intermedias: $u_x = 2e^{2x+y}$, $u_y = e^{2x+y}$, $v_x = v_y = \cos(x+y)$.
3. En $(1,-1)$: $2x + y = 1$ y $x + y = 0$, así que $u = e$, $u_x = 2e$, $u_y = e$, $v_x = v_y = \cos 0 = 1$.
4. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = z_u\, u_x + z_v\, v_x = 2e(2e) + (-1)(1)$.
5. $\dfrac{\partial z}{\partial y} = z_u\, u_y + z_v\, v_y = 2e(e) + (-1)(1)$.
6. $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,-1)} = 4e^2 - 1$ **y** $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,-1)} = 2e^2 - 1$**.** Comprobación directa: $z = e^{4x+2y} - \operatorname{sen}(x+y)$ da $z_x = 4e^{4x+2y} - \cos(x+y)$, que en el punto vale $4e^2 - 1$.

Ejercicio 4.5.8 · Razón de cambio: cono de volumen constante

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo A, problema 6.

La altura h de un cono circular recto crece a razón de 2 cm/min. Calcule la razón a la que debe cambiar su radio r para que el volumen del cono permanezca constante, en el instante en que la altura mide 3 cm y el radio 2 cm.

Resolución.

1. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Regla de la cadena respecto a t:
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\pi r h\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{3}\pi r^2\,\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}.$$
2. Volumen constante: $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$. Datos: $r = 2$, $h = 3$, $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = 2$.
3. $0 = \frac{2}{3}\pi(2)(3)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{3}\pi(4)(2) \Rightarrow 4\pi\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{8\pi}{3}$.
4. $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{2}{3}$ **cm/min:** el radio debe disminuir $\frac{2}{3}$ cm por minuto.

Ejercicio 4.5.9 · Dirección de máximo aumento y máxima razón de cambio

Adaptado de: 1er extraordinario 2019-2, problema 6.

Para la función $f(x,y) = e^{2x}\operatorname{sen} y$: a) determine la dirección en la que aumenta más rápidamente en el punto $P\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$; b) obtenga la máxima razón de cambio.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Todas las resoluciones de este cuaderno son propias. Muchos exámenes de la asignatura traen una resolución publicada; para cada problema usado en el cuaderno que la tiene, se comparó con la resolución propia, verificada con álgebra computacional. Aquí se registran las diferencias: resultados distintos, pasos que cambian el resultado y enunciados con datos incompatibles. No se registran las formas equivalentes de un mismo resultado (otra constante de integración, otra forma algebraica).

C.1 · Unidad 1 · Las integrales definida e indefinida: valor medio, sumas de Riemann y teorema fundamental

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Funciones logaritmo y exponencial: hiperbólicas, regla de L'Hôpital e integral impropia

2º final 2010-2, tipo A, problema 2: En la resolución publicada, al aplicar la regla de L'Hôpital a $\ln\cosh x / \operatorname{senh} x$ se escribe la derivada del denominador como $\operatorname{senh} x$ (es $\cosh x$); con eso se obtiene $\lim \ln y = 1$ y el resultado e. El límite verificado de $\ln y$ es 0 y el valor verificado del límite es 1.

C.3A · Unidad 3 · Parte A · Métodos de integración: partes, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

1er final 2010-2, tipo A, problema 4, inciso a): En la resolución publicada se integra $e^x \operatorname{sen} x$ en lugar de $e^{2x}\operatorname{sen} x$ y aparece $-\frac{e^x}{2}(\cos x - \operatorname{sen} x) + C$; para el integrando del enunciado, el valor verificado es $\frac{1}{5}e^{2x}(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C$.

2º extraordinario 2019-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada se toma $v = x^2$ para $\mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x$ y aparece $x^2 \operatorname{ang\,sec} x - \sqrt{x^2-1} + C$, el doble del resultado; con $v = \frac{x^2}{2}$, el valor verificado es $\frac{x^2}{2}\operatorname{ang\,sec} x - \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso b): En la resolución publicada, con las constantes correctas $A = 1$, $B = -1$, $D = 1$, el resultado aparece como $\ln(x-1) + \ln(x-2) + \frac{1}{x-2} + C$; el valor verificado es $\ln|x-1| - \ln|x-2| - \frac{1}{x-2} + C$.

1er extraordinario 2015-1, problema 3, inciso a): En la resolución publicada el resultado aparece como $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x\ln x + \frac{1}{4}x^2 + C$; el segundo término verificado es $-\frac{1}{2}x^2\ln x$.

C.3B · Unidad 3 · Parte B · Aplicaciones de la integral: área, longitud de arco y volumen de revolución

2º extraordinario 2015-1, problema 4: En la resolución publicada la curva de la derecha aparece como $x = y^2 - 2y$ en lugar de $x = 2y - y^2$, y el integrando queda $(y^2-2y) - (y^2 -$

Ejercicio propuesto 4.6.5

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 5.

Sean $f(u,v) = u^2 - v$, $u = e^{2x-y}$ y $v = \ln(xy)$. Calcule $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}$.

Resultado: $-1 - 2e^2$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

Ejercicio propuesto 4.6.6

Adaptado de: 1er extraordinario 2015-2, problema 6.

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$. Determine la dirección $\theta \in [\pi, 2\pi]$ en la que la función permanece constante a partir del punto $P(2,1)$.

Resultado: $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 105.

4.7 Errores frecuentes

- **Olvidar una condición del dominio.** Una raíz en el denominador pide > 0, no ≥ 0; un logaritmo dentro de una raíz pide dos condiciones (argumento > 0 y logaritmo ≥ 0).
- **Trazar mal el borde.** Continuo si pertenece a la región ($\geq$, $\leq$), punteado si no ($>$, $<$, $\neq$). Prueba un punto para saber de qué lado sombrear.
- **Dar curvas de nivel fuera del recorrido.** Si f solo toma valores negativos, los niveles positivos no tienen curva. Calcula el recorrido antes.
- **Usar un vector que no es unitario.** En $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$, divide primero entre $\|\mathbf{v}\|$; si no, el resultado sale multiplicado por esa norma.
- **Confundir dirección con razón de cambio.** La dirección de máximo aumento es el vector ∇f; la máxima razón de cambio es el número $\|\nabla f\|$.
- **Olvidar z_0 en el plano tangente.** Si dan $P(x_0, y_0)$ para $z = f(x,y)$, calcula $z_0 = f(x_0, y_0)$ antes de escribir el plano.
- **Perder un camino en la regla de la cadena.** Dibuja el árbol: cada camino de la función a la variable es un sumando.
- **Signo en las diferenciales.** Si la magnitud disminuye, dr y dh son negativos; evalúa las parciales en los valores iniciales.

4.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Dominio: raíz par ≥ 0; logaritmo > 0; denominador $\neq 0$.
- Curva de nivel k: $f(x,y) = k$, con k en el recorrido.
- Límite doble: si por $y = mx$ depende de m, no existe.
- Plano tangente a $F(x,y,z) = 0$ en P_0, con $\nabla F(P_0) = (a,b,c)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

- Recta normal: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b} = \dfrac{z - z_0}{c}$.

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1F 2012-1 A	VM	Imp	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2012-1 C	TFC	LH	Int	Vol	RC	PS		
1E 2012-1	Ri	LH	Int	Área	Dom	PS	Dif	5: 4.5.1
1F 2012-2 A	VM	Der	Int	Arc	Dir	RC		
1F 2012-2 C	VM	Imp	Int	Vol	Dom	PT		
2E 2012-2	VM	Imp	Int	Arc	PS	Dir		1: 1.6.5; 3: 3A.6.5
1F 2013-1 A	VM	LH	Int	Área	PT	RC		4: 3B.5.8
1F 2013-1 C	TFC	Imp	Int	Vol	Dir	Dom		4: 3B.5.4
1F 2013-2 A	VM	LH	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2014-1 A	VM	Der	Int	Arc	RC	PT		
1F 2014-2 A	VM	LH	Int	Vol	PT	RC		
1F 2015-1 C	Ri	Imp	Int	Área	Dir	PS		
2F 2015-1 A	VM	Imp	Int	Área	Dir	PT		
1E 2015-1	VM	LH	Int	Área	RC	Impl		3: 3A.5.9; 3: 3A.6.2
2E 2015-1	TFC	Imp	Int	Área	Dom	PT		1: 1.5.3; 2: 2.5.6; 4: 3B.5.1
3E 2015-1	VM	Imp	Int	Área	Dir	PT		4: 3B.6.5
1F 2015-2 A	VM	LH	Int	Vol	PS	PT		
1F 2015-2 C	TFC	Imp	Int	Arc	PT	RC		
2F 2015-2 B	VM	Imp	Int	Área	Dom	Dir		1: 1.5.4; 2: ej. 2.4; 3: 3A.6.3; 5: ej. 4.4
1E 2015-2	VM	LH	Int	Área	PS	Dir		1: 1.6.4; 5: 4.5.4; 6: 4.6.6
2E 2015-2	VM	LH	Int	Área	Dom	Dir		
3E 2015-2	VM	Imp	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2016-1 A	VM	LH	Int	Área	CN	PT		2: 2.5.4; 4: ej. 3B.4; 6: 4.6.4
1F 2016-1 C	VM	Imp	Int	Arc	Dom	PT		
2F 2016-1 A	VM	Der	Int	Vol	RC	Dir		2: 2.6.5; 4: 3B.6.2; 5: 4.5.7
1E 2016-1	VM	LH	Int	Vol	RC	Dir		
2E 2016-1	VM	Imp	Int	Área	Dom	PS		
3E 2016-1	VM	LH	Int	Vol	PS	Dir		
1E 2016-2	VM	LH	Int	Área	Dom	PS		2: 2.6.6
2E 2016-2	VM	LH	Int	Área	PS	PT		6: 4.5.5
3E 2016-2	VM	LH	Int	Área	PS	Dir		

Plan 2016

Examen	1	2	3	4	5	6	7	En el cuaderno
1F 2016-2 A	Ser	Imp	Int	Área	PS	Dir		
1F 2016-2 C	Mac	LH	Int	Vol	RC	PT		1: ej. 5.4
2F 2016-2	Ser	VM	Int	Área	PS	Dir		1: ej. 5.4; 4: 3B.6.1; 5: 4.6.2
1F 2017-1 A	Ser	LH	Int	Vol	Dom	Dir		1: 5.5.4
1F 2017-1 C	Ser	LH	Int	Vol	Dom	Dir		4: 3B.5.5
2F 2017-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	Dir		2: 2.6.2
1E 2017-1	Mac	VM	Int	Área	PT	Dir		
2E 2017-1	Ser	LH	Int	Vol	Dom	Dir		
3E 2017-1	Ser	LH	Int	Área	Dom	Dir		
1F 2017-2 A	Mac	VM	Int	Int	Int	Vol	Dir	1: 5.6.5
1F 2017-2 C	Ser	VM	Int	Arc	PT	Dom		
2F 2017-2	Ser	VM	Int	Área	PT	RC		1: 5.6.1; 2: 1.5.6
1E 2017-2	Ser	LH	Int	Arc	PS	PT		1: 5.6.3; 4: 3B.6.6
3E 2017-2	Ser	VM	Int	Área	PT	RC		
1F 2018-1 A	Ser	Par	Int	Área	Dom	RC		5: 4.5.2; 6: 4.5.8
1F 2018-1 C	Mac	LH	Int	Vol	Dom	PS		3: 3A.5.3; 4: 3B.5.3
2F 2018-1	Mac	Par	Int	Arc	Dom	PT		1: 5.6.4; 3: 3A.5.6
1E 2018-1	Ser	VM	Imp	Int	Arc	Dir		
2E 2018-1	Ser	VM	Int	Área	PS	Dir		5: 4.6.1
3E 2018-1	Mac	Par	Int	Arc	Dom	PT		
1F 2018-2 A	Ser	Imp	Int	Área	Dom	Dir		3: 3A.6.7
1F 2018-2 C	Mac	LH	Int	Área	Dom	PS		2: 2.5.5
2F 2018-2	Ser	VM	Int	Área	PT	Dom		4: 3B.5.2; 5: 4.5.3
1E 2018-2	Ser	VM	Área	Int	Dom	PS		
2E 2018-2	Ser	VM	Int	Área	PS	Dir		
3E 2018-2	Ser	VM	Int	Área	PT	Dom		
1F 2019-1 A	Ser	Imp	Int	Área	Dom	Dir		2: 2.5.8
1F 2019-1 C	Ser	LH	Int	Área	Dom	PS		1: 5.6.2
2F 2019-1	Mac	VM	Int	Vol	Dom	PT		

Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará sucesiones y series para representar funciones por medio de series de potencias.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2016. En el Plan 2010 este tema no es de esta materia (se evalúa en Cálculo Diferencial); salta esta unidad. La sección de series de Maclaurin y Taylor cubre también el subtema 2.4 del Plan 2010 (desarrollo de ln y exp en series de potencias), que no ha salido en sus exámenes.
- **Frecuencia:** es el problema 1 en 59 de los 60 finales y extraordinarios del Plan 2016 (2016-2 a 2026-1), con 61 problemas porque dos exámenes traen dos. Son 35 de sucesiones y series: intervalo de convergencia (19, casi siempre con el análisis de los extremos), carácter de una serie con un criterio (9: ocho del cociente y uno de Leibniz) y suma de una serie (7: geométricas, un decimal periódico y una diferencia de dos geométricas). Los otros 26 son series de Maclaurin (20) o de Taylor alrededor de otro punto (6); tres piden además el intervalo. Los siete primeros parciales de 2024-2 y 2025-1 son, completos, de esta unidad.
- **Tiempo:** de 3 a 4 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee las secciones 5.1 y 5.3 (30 min) y memoriza el formulario de la sección 5.8: el examen no permite formulario.
  2. Sigue los dos ejemplos de la sección 5.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 5.5 con cronómetro (12 min cada uno): el intervalo de convergencia primero, porque es el más frecuente.

5.1 Conceptos y expresiones

Sucesión. Una sucesión es una lista infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ dada por un término general a_n. *Converge* a L si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (un número); si el límite no existe o es infinito, *diverge*. El límite se calcula como el de una función de x (con L'Hôpital si hace falta): $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{7} = 7^0 = 1$. La sucesión es *monótona* si siempre crece ($a_{n+1} \geq a_n$) o siempre decrece ($a_{n+1} \leq a_n$), y *acotada* si $|a_n| \leq M$ para todo n. Toda sucesión monótona y acotada converge.

Serie. Una serie es la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ Su *suma parcial* es $S_n = a_1 + \cdots + a_n$; la serie converge a S si $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Hay que distinguir: la *sucesión* a_n puede converger (a cero) y la *serie* diverger, como en la armónica.

Criterio del término *n*-ésimo. Si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (o no existe), la serie diverge. Si el límite es cero, no se concluye nada.

Series de referencia.

- Mixtas continuas: $f_{xy} = f_{yx}$. Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
- Diferencial total: $\mathrm{d}z = f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y \approx \Delta z$.
- Cadena: $z_x = z_u\,u_x + z_v\,v_x$; $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = z_x\,x'(t) + z_y\,y'(t)$.
- Implícita: $z_x = -\dfrac{F_x}{F_z}$, $z_y = -\dfrac{F_y}{F_z}$.
- $\nabla f = (f_x, f_y, f_z)$; $D_{\mathbf{u}} f = \nabla f \cdot \mathbf{u}$ con $\|\mathbf{u}\| = 1$.
- Máximo aumento: dirección ∇f, razón $\|\nabla f\|$. Máximo descenso: $-\nabla f$. Sin cambio: $\mathbf{u} \perp \nabla f$.
- Volúmenes que salen: cilindro $V = \pi r^2 h$; cono $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

A.6 Unidad 5 · Sucesiones y series (solo Plan 2016)

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \geq 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Leibniz: $\sum (-1)^{n+1} b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ y $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$, en $(-1, 1]$.

El enunciado dice…	Procedimiento
«Determine el carácter de la serie» o «si converge o diverge» con números (sin x)	Carácter de una serie (5.3.1)
«Empleando el criterio del cociente o de D'Alembert»	Carácter de una serie (5.3.1), con el cociente
«Si es convergente, calcule su suma»; una lista $3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\ldots$; un decimal periódico	Suma de una serie (5.3.2)
«Empleando el criterio de Leibniz»; un factor $(-1)^n$	Serie alternada (5.3.3); revisa antes el término n-ésimo
«Intervalo de convergencia», con x en la serie; «incluir el análisis de los extremos»	Intervalo de convergencia (5.3.4)
«Serie de Maclaurin» o «de Taylor alrededor de a» de una función; «los primeros términos»; «el término enésimo»	Serie por derivadas (5.3.5)
La función es una conocida con $2x$, $-x$, x^2 o una constante, o una derivada o integral de una conocida	Serie a partir de una conocida (5.3.6)

5.3 Procedimientos

5.3.1 Carácter de una serie numérica

1. Calcula $\lim_{n\to\infty} a_n$. Si no es cero (o no existe), **diverge** y terminaste.
2. ¿Es geométrica ($a_n = ar^{n-1}$) o serie p? Decide con la tabla de la sección 5.1.
3. ¿Hay factoriales o potencias c^n? Usa el cociente: simplifica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ antes de tomar el límite ($\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\frac{4^{n+1}}{4^n} = 4$).
4. ¿Es un cociente de polinomios o de raíces? Compara en el límite con la serie p de las potencias dominantes.
5. ¿Hay $(-1)^n$? Usa Leibniz (5.3.3) y, si piden, revisa la convergencia absoluta.

5.3.2 Suma de una serie

1. Escribe los primeros términos y localiza el primer término a y la razón $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Cuidado con el índice: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$ empieza en $\frac{4}{9}$, no en 4.
2. Si $|r| < 1$, la suma es $\frac{a}{1-r}$; si $|r| \geq 1$, la serie diverge.
3. Si el término es una suma o diferencia de dos geométricas convergentes, suma cada una por separado.
4. Si es telescópica (fracciones parciales como $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$), escribe S_n, cancela y toma el límite.
5. Un decimal periódico $0.777\ldots = \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \ldots$ es geométrica con $r = \frac{1}{10}$.

5.3.3 Serie alternada (criterio de Leibniz)

1. Escribe la serie como $\sum(-1)^{n+1} b_n$ con $b_n > 0$.
2. Calcula $\lim_{n\to\infty} b_n$. Si no es cero, la serie diverge por el término n-ésimo (no por Leibniz).
3. Comprueba que b_n decrece: $b_{n+1} \leq b_n$, o bien la derivada de $b(x)$ es negativa.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

Las fórmulas de todas las unidades, en el orden del cuaderno. El examen no permite formulario: este apéndice es para escribirlo de memoria y comprobar.

A.1 Unidad 1 · Integrales definida e indefinida

- Riemann: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\,\Delta x$,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

- $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$; $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.
- Valor medio: $\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. TVM: existe $c \in [a,b]$ con $f(c) = \bar{f}$.
- TFC: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, con $F' = f$.
- Límites variables:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))\,g'(x) - f(h(x))\,h'(x).$$

- $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C$; $\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln|\operatorname{sen} u| + C$.
- $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{ang\,tan}\frac{u}{a} + C$; $\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{ang\,sen}\frac{u}{a} + C$.

A.2 Unidad 2 · Logaritmo, exponencial, L'Hôpital e impropia

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$; $\ln a^r = r\ln a$; $e^{\ln x} = x$; $\ln e^x = x$.
- $a^x = e^{x\ln a}$; $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$.
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$; $(e^u)' = e^u u'$; $(a^u)' = a^u \ln a\, u'$; $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$.
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$; $\displaystyle\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$; $\displaystyle\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
- $y = f^{\,g}$: $y' = f^{\,g}\big(g'\ln f + g\frac{f'}{f}\big)$.
- $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$; $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$.
- $(\operatorname{senh} u)' = \cosh u\, u'$; $(\cosh u)' = \operatorname{senh} u\, u'$; $(\tanh u)' = \operatorname{sech}^2 u\, u'$.
- $\operatorname{ang\,senh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$; $\operatorname{ang\,cosh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2-1}\big)$; $\operatorname{ang\,tanh} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.
- L'Hôpital ($\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$): $\lim\frac{f}{g} = \lim\frac{f'}{g'}$.
- $y = f^{\,g}$: $\lim y = e^{\lim g\ln f}$; $\lim_{x\to\infty}\big(1+\frac{a}{x}\big)^{bx} = e^{ab}$.
- $\int_a^\infty f = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f$. $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ converge si $p > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$, si $p < 1$.

2. Límite: $L(x) = |2x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = |2x-1|$.
3. Converge si $|2x-1| < 1$: $-1 < 2x-1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 1$. Centro $\frac{1}{2}$, radio $\frac{1}{2}$.
4. Extremo $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$, la armónica (serie p con $p = 1$): diverge.
5. Extremo $x = 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, alternada con $b_n = \frac{1}{n}$, que decrece y tiende a cero: converge por Leibniz (condicionalmente, porque $\sum \frac{1}{n}$ diverge).
6. **Intervalo de convergencia:** $0 \le x < 1$**, es decir,** $[0, 1)$**.**

Ejemplo resuelto · Serie de Maclaurin de $\ln(x+1)$

Adaptado de: 1er final 2016-2, tipo C, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función $f(x) = \ln(x+1)$.

Resolución.

1. Tabla de derivadas, evaluadas en 0:

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$(1+x)^{-1}$	1
2	$-(1+x)^{-2}$	-1
3	$2(1+x)^{-3}$	2
4	$-6(1+x)^{-4}$	-6

2. Patrón: $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ para $n \ge 1$. El coeficiente es

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{n!} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

3. **Serie:**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}.$$

4. Intervalo (no lo pide el enunciado, pero sale en otros exámenes): el cociente da $L = |x|$; en $x = 1$ queda la armónica alternada (converge) y en $x = -1$, $-\sum \frac{1}{n}$ (diverge). Converge en $(-1, 1]$.
5. Comprobación: derivando término a término, $1 - x + x^2 - \dots = \frac{1}{1+x}$, que es la derivada de $\ln(1+x)$.

Ejercicio propuesto 5.6.5

Adaptado de: 1er final 2017-2, tipo A, problema 1.

Obtenga la serie de Maclaurin de la función

$$g(x) = \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Resultado: $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{2} + x + \frac{3}{2}x^2 + 2x^3 + \dots$, para $|x| < 1$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

5.7 Errores frecuentes

- **Concluir convergencia porque** $a_n \to 0$**.** El término n-ésimo solo sirve para probar divergencia: $\frac{1}{n} \to 0$ y la armónica diverge.
- **Aplicar Leibniz sin revisar el límite.** Si b_n no tiende a cero, la serie diverge aunque alterne, como $\sum(-1)^{n+1}7^{-1/(n+1)}$.
- **Olvidar el análisis de los extremos.** El cociente da $L = 1$ en ellos y no decide; hay que sustituir cada extremo en la serie y estudiarla con otro criterio.
- **Sustituir el extremo mal.** Con $x = 0$ en $(-1)^n(x-4)^n$ queda $(-1)^n(-4)^n = 4^n$: los signos se cancelan. Escribe las potencias completas.
- **Equivocar el primer término de una geométrica.** En $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}}$ el primer término es $\frac{4}{9}$; la suma es $\frac{a}{1-r} = \frac{4/9}{2/3} = \frac{2}{3}$, no $\frac{4}{1-1/3}$.
- **Perder el término constante o el índice.** En una serie de Maclaurin, el término $n = 0$ es $f(0)$; revisa que el índice inicial del término general reproduzca el primer término de la tabla.
- **Olvidar el** $n!$ **del denominador.** El coeficiente es $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$; sin el factorial, la serie de e^x se convierte en la de $\frac{1}{1-x}$.

5.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Término n-ésimo: $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.
- Geométrica: $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ si $|r| < 1$; diverge si $|r| \ge 1$.
- Serie p: $\sum \frac{1}{n^p}$ converge si y solo si $p > 1$.
- Cociente: $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$; $L < 1$ converge, $L > 1$ diverge, $L = 1$ no decide.
- Comparación en el límite: $\lim \frac{a_n}{b_n} = c \in (0, \infty) \Rightarrow$ mismo carácter.
- Leibniz: $\sum(-1)^{n+1}b_n$ converge si b_n decrece y $b_n \to 0$.
- Taylor: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$; Maclaurin con $a = 0$.
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, en $(-1, 1)$.
- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, en $\mathbb{R}$.
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, en $\mathbb{R}$.

Resolución.

1. Cociente, con $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$:
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3^{n+1}|x+1|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{3^n|x+1|^n} = \frac{3|x+1|}{n+1}.$$
2. Para cualquier x fijo, $\lim_{n\to\infty} \frac{3|x+1|}{n+1} = 0 < 1$: la serie converge para todo x. No hay extremos que analizar.
3. **Intervalo de convergencia:** $(-\infty, \infty)$**; radio** $R = \infty$**.**
4. Comprobación: con $u = 3(x+1)$ es la serie de e^u sin su primer término, así que suma $e^{3(x+1)} - 1$ para todo x.

Ejercicio 5.5.4 · Criterio del cociente con factorial

Adaptado de: 1er final 2017-1, tipo A, problema 1.

Emplee el criterio del cociente o de D'Alembert para determinar el carácter de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n-1)!}.$$

Resolución.

1. El término siguiente es $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{n!}$. Cociente, con $\frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$:
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{4^n} = \frac{4}{n}.$$
2. $L = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 0 < 1$.
3. **La serie converge.**
4. Comprobación: con $m = n-1$, $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^{m+1}}{m!} = 4e^4$, un número finito.

Ejercicio 5.5.5 · Suma de una diferencia de geométricas

Adaptado de: 1er extraordinario 2024-2, problema 1.

Determine el valor de la suma
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{e}{\pi}\right)^{k+1} - \frac{3}{7^{k+1}}\right].$$
Si no es posible, indique por qué es divergente.

Resolución.

1. Son dos geométricas. Como $e < \pi$, la razón $\frac{e}{\pi}$ es menor que 1; la otra razón es $\frac{1}{7}$. Las dos convergen, así que la suma se separa.
2. Primera: empieza en $k = 1$ con $a = \left(\frac{e}{\pi}\right)^2$ y $r = \frac{e}{\pi}$:
$$\frac{e^2/\pi^2}{1 - e/\pi} = \frac{e^2}{\pi(\pi - e)}.$$

3. Segunda: $a = \frac{3}{49}$, $r = \frac{1}{7}$:
$$\frac{3/49}{1 - 1/7} = \frac{3}{49} \cdot \frac{7}{6} = \frac{1}{14}.$$
4. **La serie converge y su suma es** $\frac{e^2}{\pi(\pi - e)} - \frac{1}{14}$ (≈ 5.485).

Ejercicio 5.5.6 · Maclaurin de $\operatorname{senh} 2x$ e intervalo

Adaptado de: 1er final 2024-2, problema 1.

Obtenga el desarrollo en serie de Maclaurin de $f(x) = \operatorname{senh} 2x$, determine su intervalo de convergencia y haga el análisis de los extremos.

Resolución.

1. Derivadas: $f = \operatorname{senh} 2x$, $f' = 2\cosh 2x$, $f'' = 4\operatorname{senh} 2x$, $f''' = 8\cosh 2x$, y así sucesivamente. En $x = 0$: 0, 2, 0, 8, 0, 32, … Las de orden par valen 0 y la de orden impar n vale 2^n.
2. Términos no nulos, con $n = 2k+1$:
$$\operatorname{senh} 2x = 2x + \frac{8x^3}{3!} + \frac{32x^5}{5!} + \dots$$
$$\operatorname{senh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$
Es la serie de $\operatorname{senh} u$ con $u = 2x$: $2x + \frac{4}{3}x^3 + \frac{4}{15}x^5 + \dots$
3. Cociente entre términos no nulos consecutivos:
$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{4x^2}{(2k+2)(2k+3)} \to 0.$$
4. El límite es $0 < 1$ para todo x: no hay extremos.
5. $\operatorname{senh} 2x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}x^{2k+1}}{(2k+1)!}$**, convergente en** $(-\infty, \infty)$**.**

Ejercicio 5.5.7 · Taylor de e^{2x} alrededor de 1

Adaptado de: 2º final 2019-2, problema 1.

Obtenga la serie de Taylor de $f(x) = e^{2x}$ alrededor de $a = 1$.

Resolución.

1. Derivadas: $f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$, así que $f^{(n)}(1) = 2^n e^2$: e^2, $2e^2$, $4e^2$, $8e^2$, …
2. Coeficientes $\frac{f^{(n)}(1)}{n!}$: e^2, $2e^2$, $\frac{4e^2}{2!} = 2e^2$, $\frac{8e^2}{3!} = \frac{4}{3}e^2$.
3. **Serie:**
$$e^{2x} = e^2 + 2e^2(x-1) + 2e^2(x-1)^2 + \frac{4}{3}e^2(x-1)^3 + \dots$$
$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!}(x-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$
4. Comprobación: $e^{2x} = e^2\, e^{2(x-1)}$, y con $u = 2(x-1)$ en $e^u = \sum \frac{u^n}{n!}$ sale la misma serie, válida para todo x.